Simulazione di prova scritta

Generalità e classificazione dei punti critici per funzioni differenziabili

(1) Della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \left(\frac{y}{3} - 1\right)^2\right) + 1$$

scrivere gradiente e matrice hessiana.

Nel punto $P = (0, -3)$ scrivere anche

- la formula di Taylor al II ordine;
- l'equazione del piano affine tangente al grafico di f, $\Pi_P(Grafico(f))$;
- l'equazione dello spazio (piano) vettoriale tangente al grafico di f, $T_P(Grafico(f))$;
- trovare una base per $T_P(Grafico(f))$.

Quindi, trovare e classificare i punti critici di f.

Differenziabilità di una composizione

(2) Sia $p > 0$ e si ponga $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = |x|^p.$$

Calcolare $\nabla h(x)$ e $\operatorname{Hess} h(x)$.

Estremanti assoluti di una funzione (si possono usare i moltiplicatori di Lagrange)

(3) Siano $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 - 2xy + 5y^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = x + y$. Determinare $f(A)$.

Insiemi di livello

(4) Sia $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + 2x$ definita su $\mathbb{R}^2$.

- Studiare globalmente la curva di livello passante per $(0,0)$.
- Studiare globalmente la curva di livello passante per $(0,-1)$.
- Studiare l'insieme di livello passante per il punto critico di f.

Campi e potenziali

(5) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il campo $F(x,y) = (\sin(xy) + kxy\cos(xy), x^2\cos(xy) + 1)$ è chiuso? Esatto? Trovarne un potenziale.